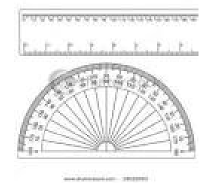
Trigonomètrie dans un triangle rectangle

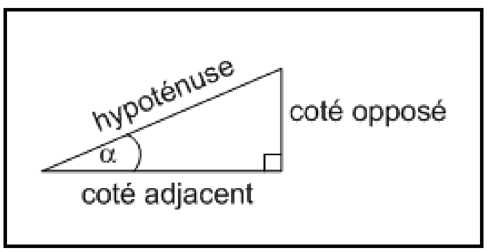
Pour cet unité, il te faut un rapporteur,

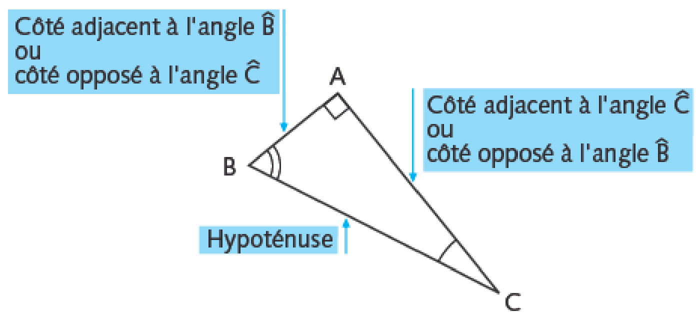
une règle métrique, et une calculatrice scientifique.



La trigonométrie (littéralement « mesures » dans le « triangle »), est une branche des maths qui vient donner des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et ses angles.

La trigonométrie se rencontre généralement dans le cas d'un triangle rectangle.
Il faut obligatoirement un **triangle rectangle** pour pouvoir les formules de la trigonométrie qu'on va apprendre.





TRAVAIL 1

1. Dans le triangle rectangle PQR rectangle en R :

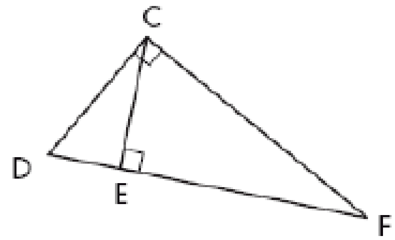
a) Quel est le côté adjacent à l'angle ?

b) Quel est le côté opposé à l'angle ?

c) À quel angle le côté [RQ] est-il adjacent ?

EXERCICE 2 :

Compléter en utilisant le dessin ci - contre :



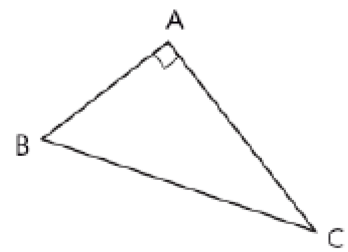
a) Dans le triangle rectangle CDF, le côté opposé à l'angle $\hat{D}$ est ...

b) Dans le triangle rectangle CDF, le côté adjacent à l'angle $\hat{F}$ est ...

c) Dans le triangle rectangle CEF, l'hypoténuse est ...

d) Dans le triangle rectangle CDE l'angle adjacent à $\hat{D}$ est ...

e) Dans le triangle rectangle CDE l'angle opposé à $\hat{C}$ est ...

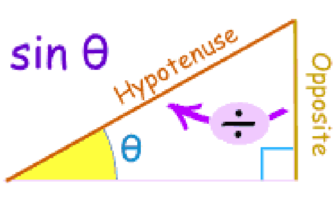


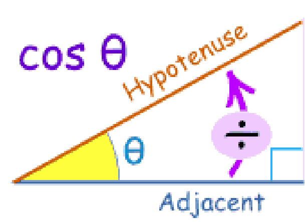
2. Propriétés et définitions :

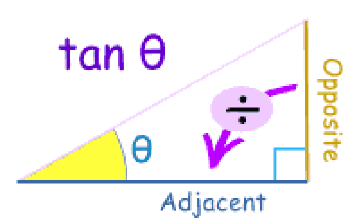
Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\textit{longueur du côté adjacent à un angle}}{\textit{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé cosinus de cet angle.**

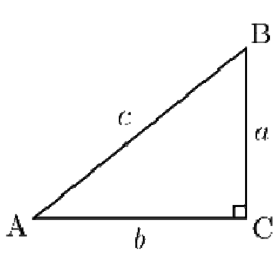
Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé à un angle}}{\textit{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé sinus de cet angle.**

Dans un triangle rectangle le rapport $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé à un angle}}{\textit{longueur du côté adjacent à cet angle}}$ ne dépend que de cet angle **il est appelé tangente de cet angle.**









$\boxed{\sin A = \dfrac{opposé}{hypotenuse} = \dfrac{a}{c}}$ $\boxed{\cos A = \dfrac{adjacent}{hypotenuse} = \dfrac{b}{c}}$ $\boxed{\tan A = \dfrac{opposé}{adjacent} = \dfrac{a}{b}}$

TRAVAIL 2

On peut trouver des valeurs approchée du cosinus, sinus, de la tangente d'un angle en utilisant les touches « cos », « sin » et « tan ».

1.

En utilisant une calculatrice donner une valeur approchée à 0 ,001 près par défaut de :

a) cos 25° b) sin 75° c) tan 67°

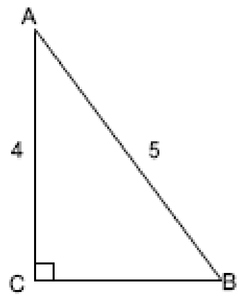
Avec une calculatrice il est possible de calculer des valeurs approchées de la mesure d'un angle quand on connait son sinus, son cosinus ou sa tangente. Pour cela on utilise la touche « $\cos^{-1}$ » (ou « arccos ») ou « $\sin^{-1}$ » (ou « arcsin ») ou « $\tan^{-1}$ » (ou « arctan »)

2.

Calculer, si possible, une valeur approchée par excès à 0,1° près de x dans les cas suivants :

a) cos x = 0,567 b) sin x = 0,876 c) tan x = 2,37 d) sin x = 1,2

Trouve les mesures de l'angle en utilisant le rapport trigonométrique.



Trouve la mesure de $\angle B$.

Solution:

$$\sin B = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\sin B = \frac{4}{5}$$

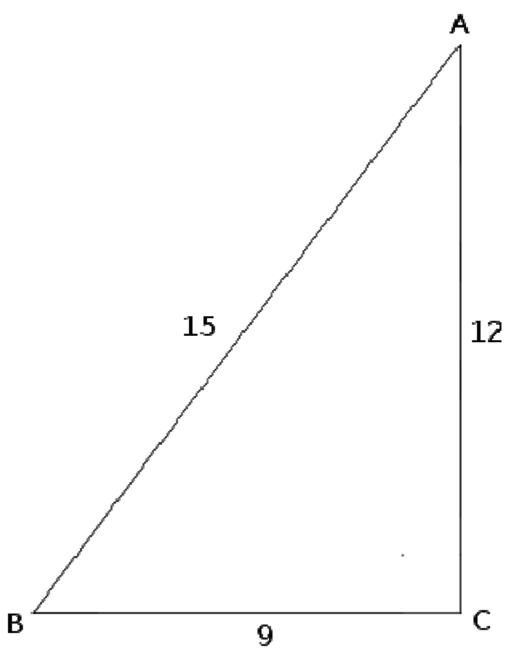
$$\sin B = 0{,}8$$

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$ 53,13° ou

$\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$

Selon la calculatrice utilisée, le touche « INV » pourrait aussi s'appeler « ARC », « 2nd » ou « SHIFT ».

3. Emploie l'exemple au-dessous pour trouver la mesure de $\angle$B, en utilisant la formule pour sin B, puis pour sin A.



TRAVAIL 3

Utilisation des rapports trigonométriques sinus, cosinus, tangente pour résoudre les problèmes de triangles rectangles.

1. Dessine et étiquette un triangle rectangle au moyen des paramètres suivants :

   a) l'angle A mesure 30°

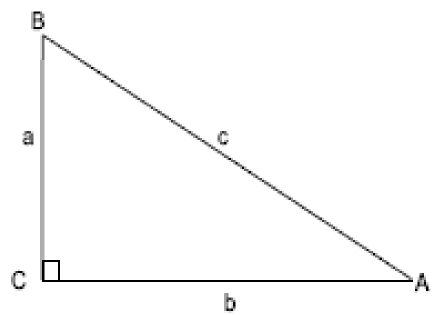
   b) l'angle C mesure 90°

   c) le côté opposé à ∠A est a

      le côté opposé à ∠B est b

      le côté opposé de ∠C est c

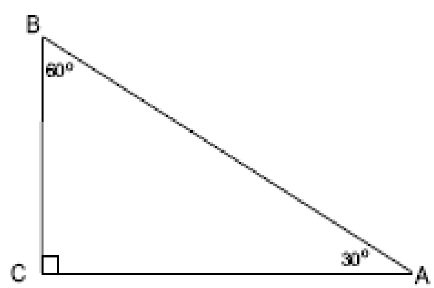
   Détermine la mesure de l'angle B.



Assure-toi d'étiqueter les angles du triangle comme dans l'illustration. L'exactitude de l'identification est ***extrêmement*** importante lorsque tu dessines des triangles.

2. Mesure chaque côté des triangles en centimètres et inscris leurs mesures sur leurs diagrammes.

3. Établis les rapports pour les côtés du triangle rectangle.



Exemple :

$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$

4. Calcule ces rapports en utilisant les mesures des côtés de ton triangle

   Exemple :

$\frac{a}{b} =$ $\qquad$ $\frac{b}{c} =$

$\frac{a}{c} =$ $\qquad$ $\frac{b}{a} =$

4. Calcule ces rapports en utilisant les mesures des côtés de ton triangle

   Exemple :

   $\frac{a}{b} =$ $\qquad$ $\frac{b}{c} =$

   $\frac{a}{c} =$ $\qquad$ $\frac{b}{a} =$

5. Commence avec $\angle A = 30°$. Détermine le sinus de $\angle A$ à l'aide de ta calculatrice.

   Exemple :

   sin 30^0 = $\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{30}$ = 0,5 ou $\boxed{30}$ $\boxed{\text{SIN}}$ = 0,5

   Lequel des quatre rapports ci-dessus correspond à ce nombre? Note le rapport.

6. Détermine le cosinus de l'$\angle A$ à l'aide de ta calculatrice.

   Exemple :

   cos 30^0 = $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{30}$ = 0,866 0 ou $\boxed{30}$ $\boxed{\text{COS}}$ = 0,866 0

   Lequel des quatre rapports ci-dessus correspond à ce nombre? Note le rapport.

7. Détermine la tangente de l'$\angle A$ à l'aide de ta calculatrice.

   Exemple :

   tan 30^0 = $\boxed{\text{TAN}}$ $\boxed{30}$ = 0,577 4 ou $\boxed{30}$ $\boxed{\text{TAN}}$ = 0,577 4

   Lequel des quatre rapports ci-dessus correspond à ce nombre? Note le rapport.

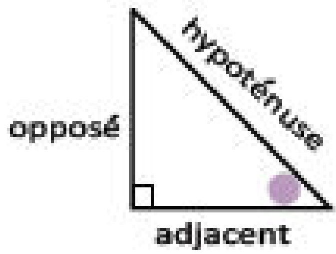
8. Répète les numéros 5 à 7, et trouve le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle B, et apparie les rapports. Note les rapports.

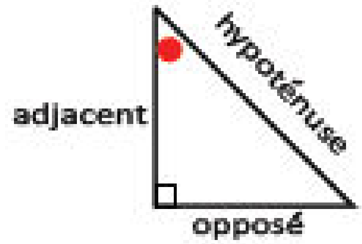
TRIGONOMETRIE

La trigonométrie est une branche des mathématiques reposant sur les mesures des côtés et des angles des triangles. Le mot trigonométrie est formé à partir de trois mots :

$$\frac{\textit{tri}}{\textit{trois}} \quad \frac{\textit{gono}}{\textit{angle}} \quad \frac{\textit{métrie}}{\textit{mesure}}$$

En travaillant avec les triangles rectangles, nous devons comprendre les relations entre les angles et la longueur des côtés.



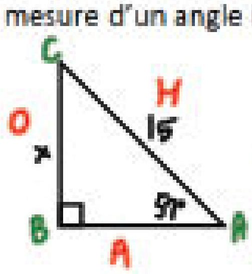


LE RAPPORT "SINUS"

Le rapport entre la longueur du côté opposé a un angle donné et la longueur de l'hypoténuse demeure le même, peut importe la dimension du triangle.

$$Sinus\ A = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \angle A}{\text{longueur de l'hypothénuse}} \qquad \text{ou} \qquad Sin\ A = \frac{O}{H}$$

Ce rapport peut être utilisé pour calculer la longueur d'un côté inconnu ou la mesure d'un angle inconnu.

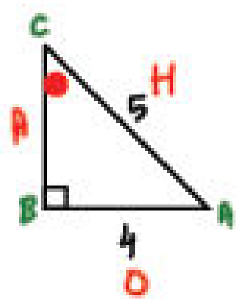


$Sin A = \frac{O}{H}$

$Sin 57° = \frac{x}{15}$

$0.8387 = \frac{x}{15} \times 15$
$\times 15$

$12.6 = x$



$Sin C = \frac{O}{H}$

$Sin C = \frac{4}{5}$

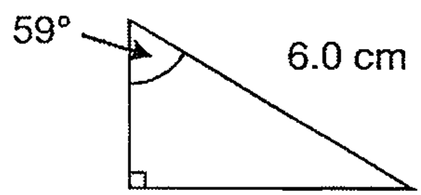
$Sin C = 0.8$

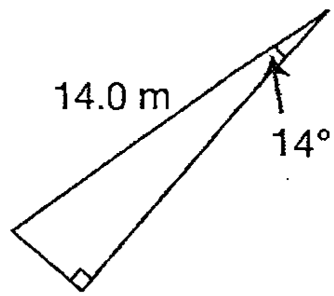
$(Sin^{-1} 0.8)$ calculatrice

$= 53.1°$

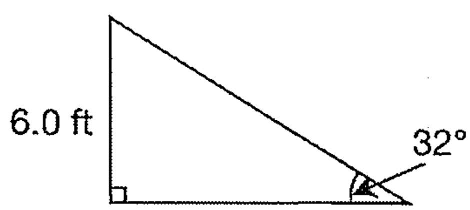
TRAVAIL 4

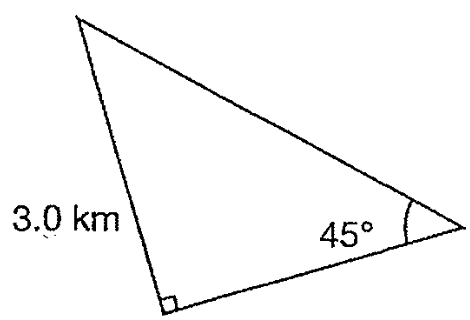
1. Emploie la formule pour SIN pour trouver le côté opposé à l'angle donné, puis écrire la mesure sur le triangle. Arrondis au 100e près.

a) 

b) 

2. Emploie la formule pour SIN pour trouver l'hypoténuse des triangles suivantes, puis écris la longueur sur les triangles. (change « ft » à « pi »).

a) 

b) 

Si on connait 2 côtés, on en trouver la troisième avec la formule de Pythagore.

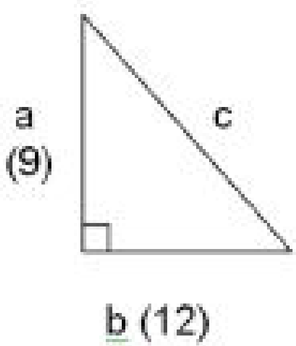
LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Le théorème de Pythagore s'énonce comme suit:

> Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Dans tout triangle rectangle, $c^2 = a^2 + b^2$, <u>c</u> étant la longueur de l'hypoténuse, <u>a</u> et <u>b</u> étant les longueurs des autres côtés.

cathète

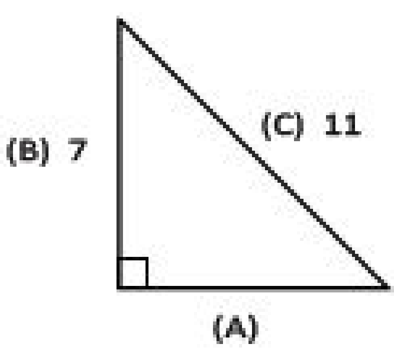


$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = (9)^2 + (12)^2$$
$$c^2 = 81 + 144$$
$$c^2 = 225$$
$$c = \sqrt{225}$$
$$c = 15$$

Si le côté inconnu est autre que l'hypoténuse (côté A ou B). L'équation peut être modifiée.

cathète

$$A^2 = C^2 - B^2$$



$$A^2 = C^2 - B^2$$
$$A^2 = (11)^2 - (7)^2$$
$$A^2 = 121 - 49$$
$$A^2 = 72$$
$$\sqrt{A^2} = \sqrt{72}$$
$$A \approx 8.5$$

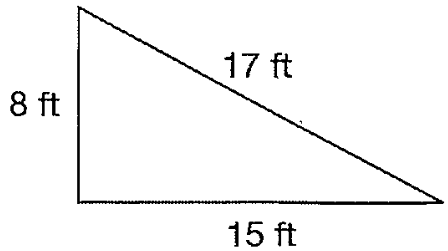
TRAVAIL 5

1. Employer le théorème Pythagore pour tester les triangles suivants et trouver s'ils sont les triangles rectangles.

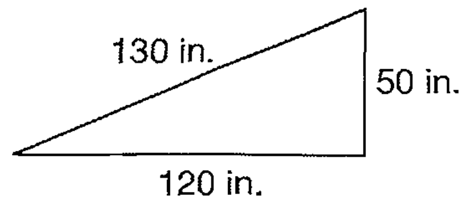
(S'ils sont les triangles rectangles, cathète² + cathète² va égale hypotenuse².)

(change « ft » à « pi » et « in » à « po » et « yd » à « vg » dans les diagrammes)

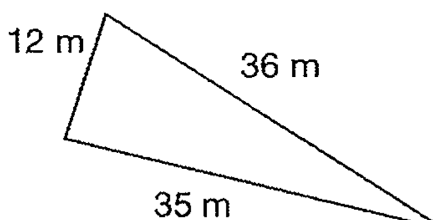
a)



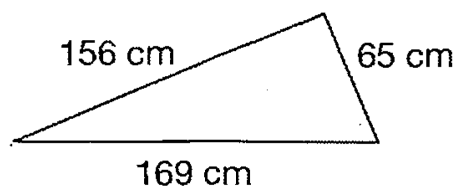
c)



b)

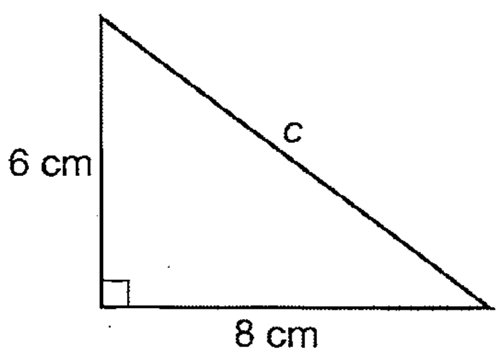


d)

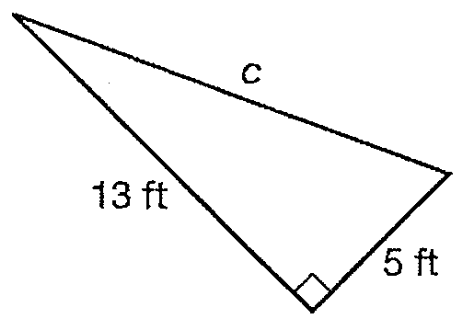


2. Trouve la longueur de l'hypoténuse. Arrondis à l'unité près.

a)

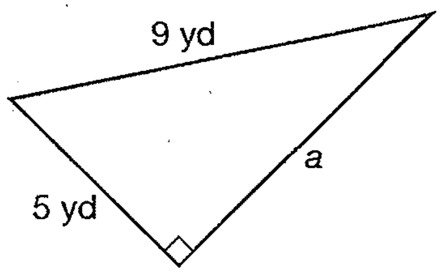


b)

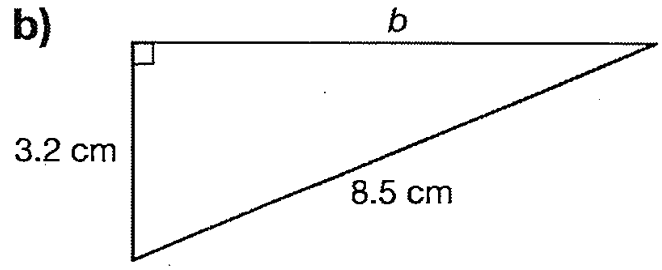


3. Trouve la longueur du cathète inconnu. Arrondis au dixième près.

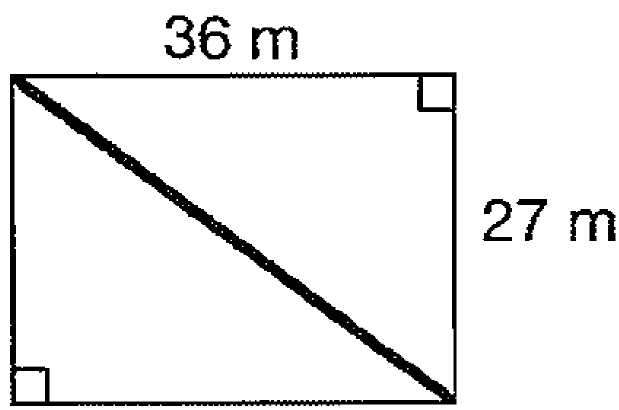
a)



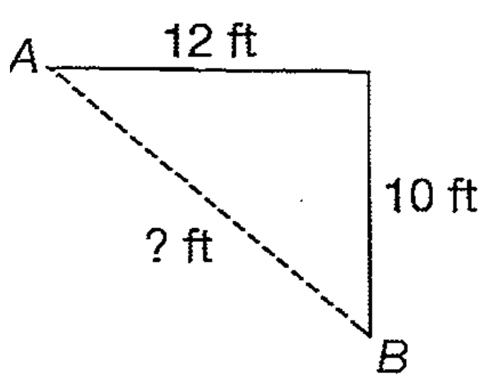
b)



4. On construit un sentier entre les coins d'un parc. Quel est la longueur du sentier?



5. Luc construit un abri de jardin. Quel devrait être la mesure du diagonale pour que le mur de 12 pieds est perpendiculaire au mur de 10 pieds?

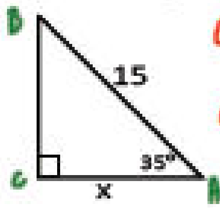


LE RAPPORT "COSINUS"

Le rapport entre la longueur du côté adjacent à un angle donné et la longueur de l'hypoténuse demeure le même, peut importe la dimension du triangle.

$$Cosinus\ A = \frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à \angle A}{longueur\ de\ l'hypothénuse} \quad \text{ou} \quad Cos\ A = \frac{A}{H}$$

Ce rapport peut être utilisé pour calculer la longueur d'un côté inconnu ou la mesure d'un angle inconnu.

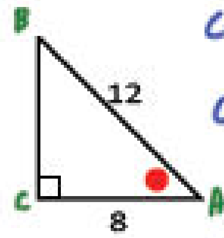


$Cos\ A = \frac{A}{H}$

$Cos\ 35° = \frac{x}{15}$

$0,9191 = \frac{x}{15}$

$x = 12.3$



$Cos\ A = \frac{A}{H}$

$Cos\ A = \frac{8}{12}$

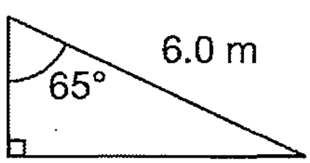
$Cos\ A = 0.6666$

$Cos^{-1} 0.6666 = 48.2°$

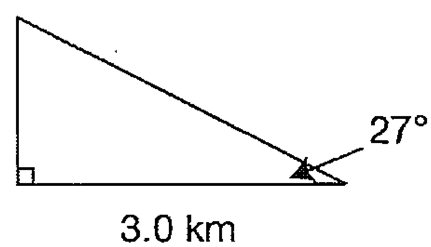
TRAVAIL 6

1. Calcule les longueurs de tous les côtés inconnus des triangles suivants. Emploie COS pour un côté et SIN ou Pythagore pour l'autre côté. Étiquette les triangles avec les mesures. Arrondi au 10^e^ près.

a)



b)

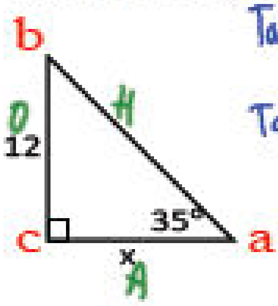


LE RAPPORT "TANGENTE"

Le rapport entre la longueur du côté opposé à un angle donné et la longueur du côté adjacent demeure le même, peut importe la dimension du triangle.

$$Tangente\,A = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \angle A}{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \angle A} \quad \text{ou} \quad Tan\,A = \frac{O}{A}$$

Ce rapport peut être utilisé pour calculer la longueur d'un côté inconnu ou la mesure d'un angle inconnu.

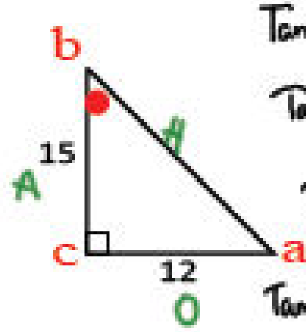


$Tan\,A = \frac{O}{A}$

$Tan\,35° = \frac{12}{A}$

$0{,}7002 = \frac{12}{A}$

$A = 17{,}1$



$Tan\,B = \frac{O}{A}$

$Tan\,B = \frac{12}{15}$

$Tan\,B = 0.8$

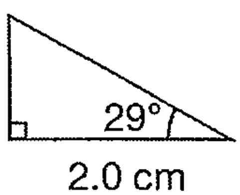
$Tan^{-1}\,B$ de $0{,}8$

$= 38{,}7°$

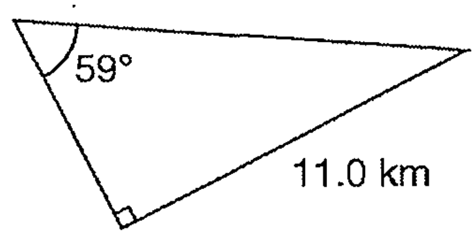
TRAVAIL 7

1. Calcule, puis étiquette, les longueurs des cathétes/hypoténuses inconnus. Arrondi au 100^e près.

a)

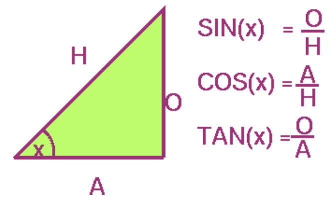


b)



Nous connaissons déjà les 3 formules de calculer des angles ou des longueurs dans un triangle rectangle. Maintenant comment sait-on choisir entre les 3 formules?

Cosinus, sinus, tangente



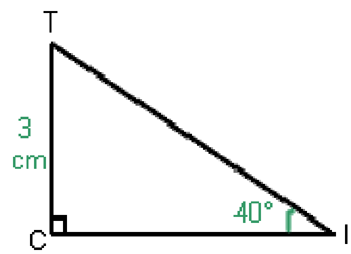
Retiens ceci: SOHCAHTOA

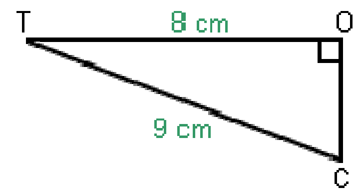
En regroupant les lettres 3 par 3 on a les 3 formules de trigonométrie.

$$Sinus = \frac{Opposé}{Hypoténuse} \qquad Cosinus = \frac{Adjacent}{Hypoténuse} \qquad Tangente = \frac{Opposé}{Adjacent}$$

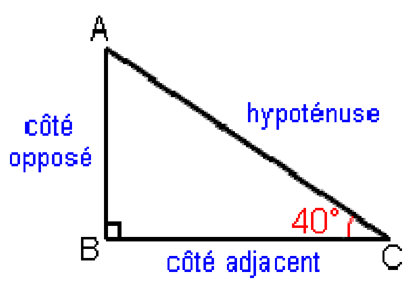
On utilise ces formules quand on connaît un angle et un côté dans un triangle rectangle, ou 2 côtés, et que l'on cherche les mesures des angles et côtés manquants.

Avec les formules de trigonométrie, on peut connaître tous les angles et tous les côtés des triangles ci-contre.

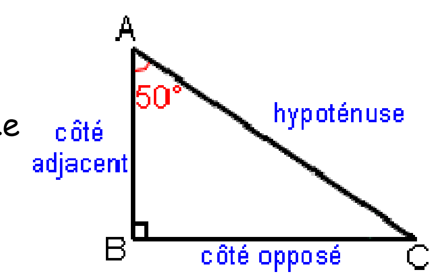




Choix de la formule



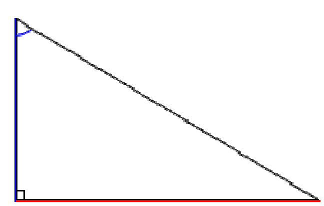
Le côté opposé à un angle, c'est le côté qui ne touche pas cet angle. Le côté opposé et le côté adjacent dépendent de l'angle considéré.



On choisi la formule de trigonométrie en fonction des données connues et de la donnée demandée. Par exemple si on connaît un angle, son côté opposé et que l'on demande l'hypoténuse on va utiliser la formule du sinus.

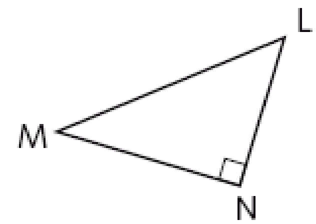
As-tu compris?

Dans le triangle ci-dessous, on connaît la côté à gauche et la formule en bas.
Quelle formule utilises-tu?



TRAVAIL 8

1. En utilisant le dessin, compléter les suivants :

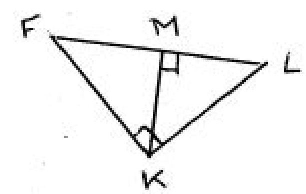


cos M = -----------

sin M = --- -----

tan L = ----------

2. Écrire de deux façons différentes : cos F , sin F, et tan L.



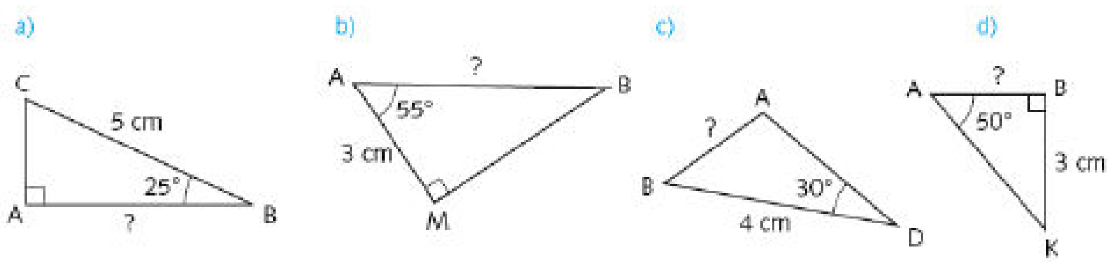
cos F = --------------- = ----------------------

sin F = ---------------- = -----------------------

tan L = ----------------- = ----------------------

3.

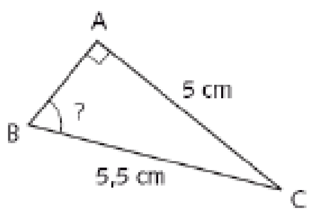
Calculer, si possible, une valeur approchée à 0, 1 cm près de AB dans les cas suivants (les dessins ne sont pas réalisés à l'échelle) :



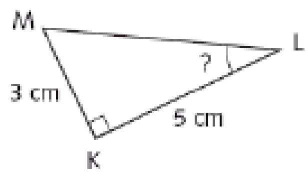
4.

Dans chacun des cas ci-dessous calculer, si possible, la mesure de l'angle demandé, on donnera une troncature à 1° près (les dessins ne sont pas tracés à l'échelle).

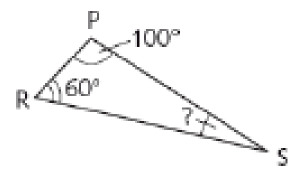
a)



b)



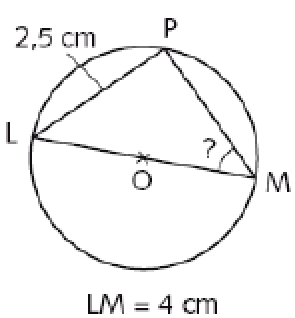
c)



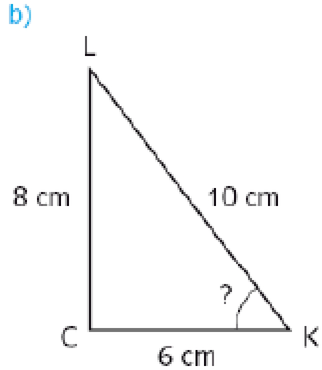
5.

Dans chacun de ces cas, calculer la longueur demandée ou la mesure de l'angle demandée. On donnera une valeur approchée par excès à 0, 1 cm près ou à 1° près (Les dessins ne sont pas tracés à l'échelle).

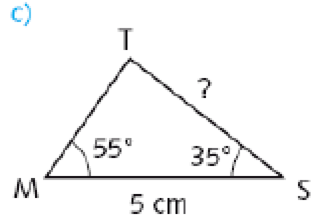
a)



b)

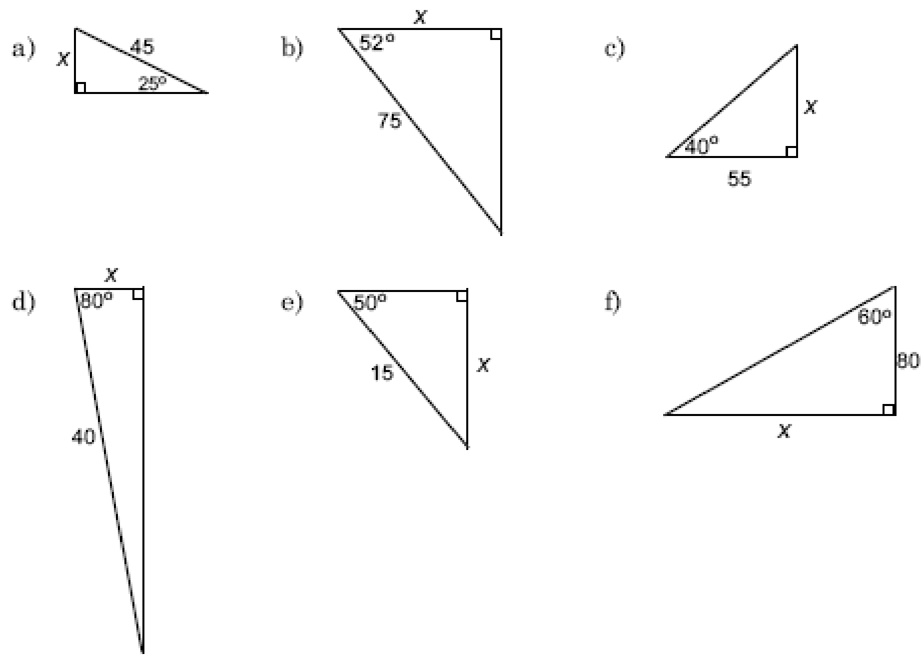


c)

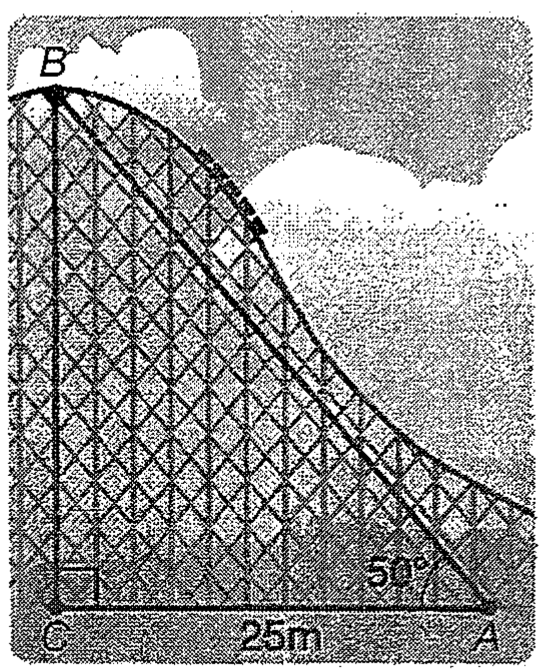


6.

Dans chacune des figures suivantes, vois si tu dois utiliser le rapport trigonométrique sinus, cosinus ou tangente pour trouver x.

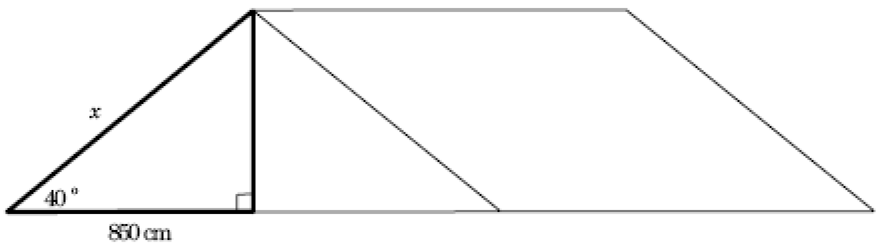


7. Tabitha compte 25 pas du base de la montagne russe. De cette position, elle estime que CA est d'environs 25 m et que l'angle de l'élévation, $\angle$BAC, est 50º. Quelle est la hauteur la plus grande, arrondi au 10^e près?



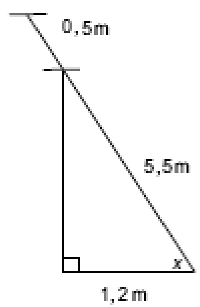
8.

En tenant compte de l'information donnée, calcule la longueur du câble de hauban (x) qui retient la tente.



9.

Une échelle de 6,0 m est appuyée contre le mur d'un garage. Elle dépasse le toit du garage de 0,5 m. Le bas de l'échelle se trouve à 1,2 m du mur. Trouve l'angle que l'échelle forme avec le sol.



Pour les questions qui suivent, dessine un diagramme bien étiqueté qui te permettra de visualiser tes calculs.

10.

Un escalier a 12 m de long et une inclinaison de 35°. Quelle est sa hauteur?

11.

Un plongeur nage 330 m, à un angle de 15° de la surface de l'océan. Trouve la distance verticale entre le plongeur et la surface de l'océan.